

$$S = \frac{1}{2}h(2h) = h^2$$

-۱

$$\text{ارتفاع} = x \quad \text{قاعدۀ} = 2x$$

-۲

$$S = \frac{1}{2}(2x)(x) = 26 \Rightarrow x^2 = 26 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \text{قاعدۀ} = 2x = 12$$

$$\text{طول} = 5a \quad \text{و عرض} = a$$

-۳

$$S = a(5a) = 144 \Rightarrow 5a^2 = 144 \Rightarrow a^2 = 28.8 \Rightarrow a = 12\sqrt{2}$$

$$\text{طول} = 5a = 5(12\sqrt{2}) = 60\sqrt{2}$$

$$S = 4(Lh) + L^2 \Rightarrow S = 4(4 \times 5) + 4^2 = 80 + 16 = 96$$

-۴

$$S = \frac{1}{2}x(12) = 26 \Rightarrow 6x = 26 \Rightarrow x = 6$$

-۵

$$S = \frac{1}{2}(x \times x) = 40 \Rightarrow x^2 = 80 \Rightarrow x = 4\sqrt{5}$$

-۶

$$XZ = a \quad YZ = b \Rightarrow BC = 2b, \quad AC = 2a, \quad \frac{S_{ABC}}{S_{XYZ}} = \frac{\frac{1}{2}(2b)(2a)}{\frac{1}{2}(b)(a)} = 4$$

-۷

$$\frac{S_{ABC}}{S_{XYZ}} = \frac{\frac{1}{2}(nb)(na)}{\frac{1}{2}(b)(a)} = n^2$$

-۸

مساحت مثلث پایین - مجموع مساحت مربع ها = مساحت سایه زده شده

$$\Rightarrow S = (5^2 + 4^2 + 3^2) - \frac{1}{2}(5+4+3)(5) \Rightarrow S = (25+16+9) - 30 = 50 - 30 = 20$$

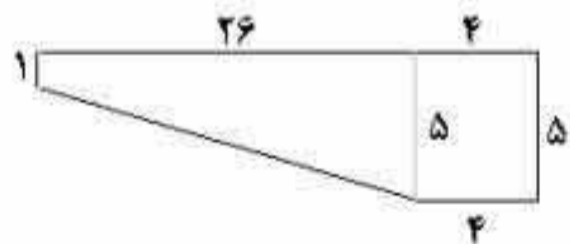
$$MN = NQ \text{ و ارتفاع مثلثها برابر } \Rightarrow \frac{S_{MNP}}{S_{NQP}} = \frac{\frac{1}{2}MN \times h}{\frac{1}{2}NQ \times h} = 1 \Rightarrow S_{MNP} = S_{NQP}$$

$$\text{الف) } 2QN = NM \Rightarrow \frac{S_{PNM}}{S_{PNQ}} = \frac{\frac{1}{2}MN \times h}{\frac{1}{2}NQ \times h} = \frac{NM}{NQ} = \frac{2NQ}{NQ} = 2$$

$$\text{ب) } N'M = N'N = NQ \Rightarrow \frac{S_{PQN}}{S_{PN'M}} = \frac{\frac{1}{2}NQ \times h}{\frac{1}{2}N'M \times h} = \frac{NQ}{N'M} = 1 \Rightarrow S_{PQN} = S_{PN'M}$$

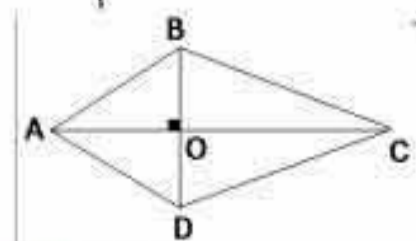
$$\text{ب) } QM = 2NN' \Rightarrow \frac{S_{PQM}}{S_{PNN'}} = \frac{\frac{1}{2}QM \times h}{\frac{1}{2}NN' \times h} = \frac{QM}{NN'} = \frac{2NN'}{NN'} = 2$$

$$S = \frac{1}{2}(5+1)(26) + (4 \times 5) = 78 + 20 = 98$$



$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}(AC \times OB) + \frac{1}{2}(AC \times OD) = \frac{1}{2}AC(OB + OD)$$

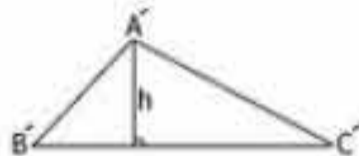
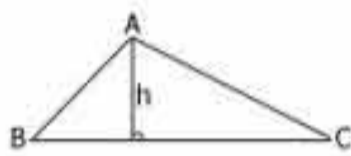
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \times BD$$



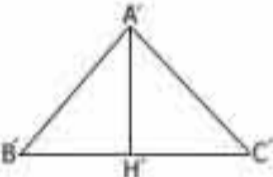
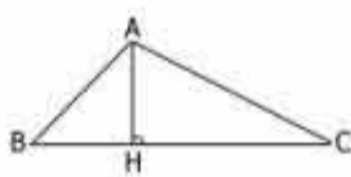
مساحت کف استخر $= 9 \times 6 = 54$ و مساحت کاشی $= 0.5 \times 0.5 = 0.25$

-۱۴

$$\text{تعداد کاشی} = \frac{54}{0.25} = \frac{54}{\frac{1}{4}} = 54 \times 4 = 216 \Rightarrow \text{هزینه} = 350 \times 216 = 75600$$

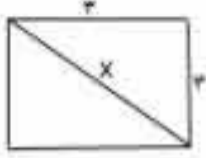


$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} BC \times h}{\frac{1}{2} B'C' \times h} = \frac{BC}{B'C'} \quad -15$$



$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} BC \times AH}{\frac{1}{2} B'C' \times A'H'} = \frac{AH}{A'H'} \quad -16$$

۱۷- الف بر اساس اصل ۱ ، ب بر اساس اصل ۲ ، پ بر اساس اصل ۴ می باشد.



الف) $x^2 = 9 + 9 \Rightarrow a^2 = 18 \Rightarrow a = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$

-۱

ب) $x^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow a^2 = 50 \Rightarrow a = \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$

پ) $x^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow x^2 = 2a^2 \Rightarrow x = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$

الف) $d^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34 \Rightarrow d = \sqrt{34}$

-۲

ب) $d^2 = a^2 + b^2 = 4^2 + 7^2 = 16 + 49 = 65 \Rightarrow d = \sqrt{65}$

پ) $d^2 = (3r)^2 + (5r)^2 = 9r^2 + 25r^2 = 34r^2 \Rightarrow d = r\sqrt{34}$

ت) $d^2 = (4r)^2 + (7r)^2 = 16r^2 + 49r^2 = 65r^2 \Rightarrow d = r\sqrt{65}$

۳- $x^2 = 144 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow \text{قطر مربع} = x\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

-۳

۴- $S = \frac{1}{2}(2x)(x) = 72 \Rightarrow x^2 = 72 \Rightarrow x = 6\sqrt{2}, 2x = 12\sqrt{2}$

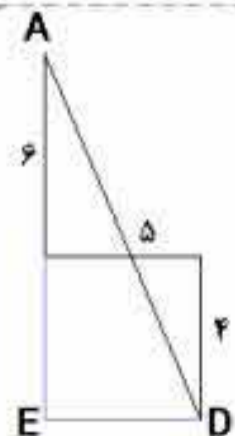
وتر = $a \Rightarrow a^2 = (6\sqrt{2})^2 + (12\sqrt{2})^2 = 72 + 288 \Rightarrow a^2 = 360 \Rightarrow a = 6\sqrt{10}$

الف) $PA_1^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow PA_1 = \sqrt{2}$

-۵

ب) $PA_2^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow PA_2 = \sqrt{3}$ پ) $PA_3 = \sqrt{4}, PA_n = \sqrt{n+1}$

$AE^2 + ED^2 = AD^2 \Rightarrow (6+4)^2 + 5^2 = AD^2 = 100 + 25 = 125$
 $\Rightarrow AD = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$



-۶

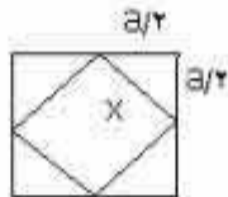
$$- ۷ \quad \text{اضلاع مثلث قائم الزاویه} = ۲x, ۲x \Rightarrow S = \frac{1}{2}(۲x)(۲x) \Rightarrow ۲x^2 = ۲۷$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = ۳$$

$$\text{اضلاع قائم الزاویه} = ۲(۳), ۲(۳) = ۶, ۶ \Rightarrow a^2 = ۶^2 + ۶^2 = ۳۶ + ۳۶ = ۷۲ \Rightarrow a = ۶\sqrt{۲}$$

$$- ۸ \quad \text{اضلاع قائم الزاویه} = ۴x, ۵x \Rightarrow S = \frac{1}{2}(۴x)(۵x) = ۱۰x^2 = ۳۲ \Rightarrow x^2 = ۳.۲ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۳}$$

$$\text{اضلاع قائم الزاویه} = \{ ۴(۲\sqrt{۳}), ۵(۲\sqrt{۳}) \} = \{ ۱۶\sqrt{۳}, ۲۰\sqrt{۳} \}$$



۹- اگر طول ضلع مربع بزرگ a و ضلع مربع کوچک x باشد،

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{۲a^2}{۴} = \frac{a^2}{۲} \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{۲} \Rightarrow \frac{S'}{S} = \frac{x^2}{a^2} = \frac{\frac{a^2}{۲}}{a^2} = \frac{1}{۲}$$

$$- ۱۰ \quad \text{اگر ضلع مربع } a \text{ باشد،} \quad \square \quad a\sqrt{۲} = ۸\sqrt{۲} \Rightarrow a = ۸ \quad S = a^2 = ۸^2 = ۶۴$$

$$- ۱۱ \quad PQ^2 + (۱۲-۸)^2 = ۳۰^2 \Rightarrow PQ^2 + ۱۶ = ۹۰۰ \Rightarrow PQ^2 = ۸۸۴ \Rightarrow PQ = \sqrt{۸۸۴} = ۲\sqrt{۲۲۱}$$

$$\text{الف) } \begin{cases} AQ^2 = a^2 + b^2 \\ DQ^2 = a^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow AQ^2 + DQ^2 = ۲a^2 + b^2 + c^2, \quad AQ^2 + DQ^2 = AD^2 \quad - ۱۲$$

$$\Rightarrow AD^2 = ۲a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow AD = \sqrt{۲a^2 + b^2 + c^2}$$

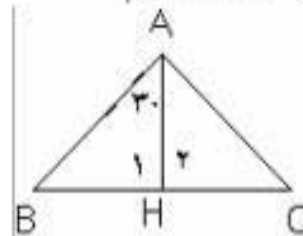
$$AD = BC = (b+c) \Rightarrow AD^2 = (b+c)^2 = b^2 + c^2 + ۲bc$$

$$AD^2 = ۲a^2 + b^2 + c^2 \quad \text{از طرفی طبق الف) می دانیم}$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 + 2bc = 2a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow 2a^2 = 2bc \Rightarrow a^2 = bc$$

پس

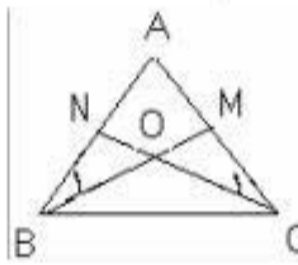
۱۳- قاعده BH از مثلث ABH را به اندازه ی خود ادامه می دهیم و به A وصل می کنیم.



$$\begin{cases} AH = AH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ BH = HC \end{cases} \text{ ض ض ض } \Rightarrow \Delta ABH \cong \Delta AHC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

بنابر این مثلث ABC متساوی الاضلاع است. پس $BC = AB$ ، $BC = 2BH \Rightarrow 2BH = AB$

۱۴- در مثلث متساوی الاضلاع، نیمساز هر زاویه نقش میانه، عمود منصف و ارتفاع هم دارد پس



$$AB = AC \Rightarrow NB = MC, \begin{cases} NB = MC \\ \hat{N} = \hat{M} = 90^\circ \\ \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 30^\circ \end{cases} \text{ ض ض ز } \Rightarrow \Delta ONB \cong \Delta OMC$$

$$\Rightarrow ON = OM, \hat{B}_1 = 30^\circ$$

به همین ترتیب $\frac{OB}{ON} = 2, \frac{OC}{ON} = 2$ ، $ON = OM \Rightarrow \frac{OB}{OM} = 2, \frac{OC}{OM} = 2$ طبق مسئله ۱۳

$$\Delta ACP: PC^2 = AC^2 - AP^2$$

$$\Delta BCP: PC^2 = BC^2 - PB^2 \Rightarrow 2PC^2 = AB^2 - (AP^2 + PB^2)$$

$$\Delta ABC: AB^2 = AC^2 + BC^2$$

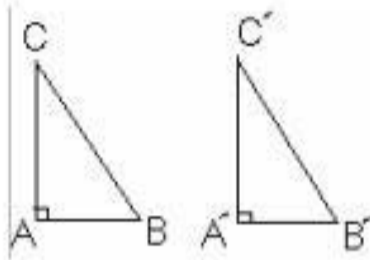
-۱۵

$$= (AP + PB)^2 - (AP^2 + BP^2) = AP^2 + PB^2 + 2AP \times PB - AP^2 - PB^2$$

$$\Rightarrow 2PC^2 = 2AP \times PB \Rightarrow PC^2 = AP \times PB$$

$$ب) AC^2 = AP^2 + PC^2 = AP^2 + AP \times PB = AP(AP + PB)$$

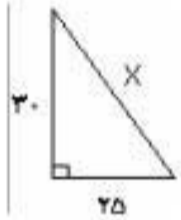
$$AP \times AB \Rightarrow AC^2 = AP \times AB$$



$$فرض \begin{cases} BC = B'C' \\ AB = A'B' \\ \hat{A} = \hat{A}' = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \text{ م.م.م} \quad -16$$

(اثبات)

$$\begin{cases} BC^2 = AB^2 + AC^2 \\ B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2 \Rightarrow AC = A'C' \\ BC = B'C', AB = A'B' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AC = A'C' \\ AB = A'B' \\ BC = B'C' \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C' \text{ ض ض ض}$$



$$x^2 = 30^2 + 25^2 = 900 + 625 \Rightarrow x^2 = 1525 \Rightarrow x = \sqrt{1525} = 5\sqrt{61} \quad -17$$

$$AF = 10, AD = AF, AG = GD, AD^2 = AG^2 + GD^2$$

$$الف) \Rightarrow 10^2 = 2AG^2 \Rightarrow AG^2 = 50, S_{AGD} = \frac{1}{2}AG \times GD = \frac{1}{2}AG^2 \quad -18$$

$$S_{ADG} = \frac{1}{2}(50) = 25$$

$$CE = 18, DE = x \Rightarrow x + \frac{x}{2} = 18 \Rightarrow x = 12, AG = y \Rightarrow 2y^2 = 12^2$$

ب)

$$y^2 = 36, S_{AGD} = \frac{1}{2}AG \times GD = \frac{1}{2}AG^2 = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(36) = 18$$

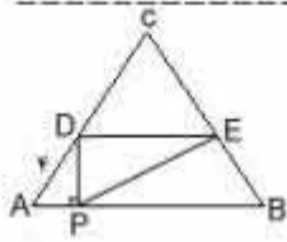
$$BD = 3\sqrt{2}, \quad 2BH^2 = BD^2 \Rightarrow 2BH^2 = 18 \Rightarrow BH = 3 = HD \Rightarrow AD = 6$$

پ) $AG = y \Rightarrow 2y^2 = 36 \Rightarrow y^2 = 18, \quad S_{AGD} = \frac{1}{2} AG \times GD = \frac{1}{2} AG^2$
 $= \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} (18) = 9$

$$S_{BCDH} = 49 = HD^2 \Rightarrow HD = 7 \Rightarrow AD = 14, \quad AG = y \Rightarrow 2y^2 = 196$$

ت) $y^2 = 98, \quad S_{AGD} = \frac{1}{2} AG \times GD = \frac{1}{2} AG^2 = \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} (98) = 49$

ث) $S_{AGDEF} = 27 = 3S_{AGD} \Rightarrow S_{AGD} = 9$



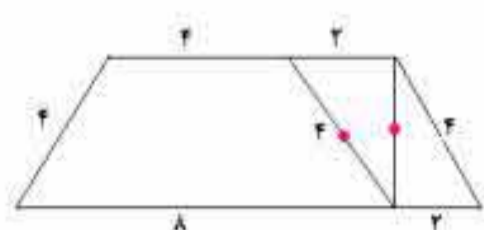
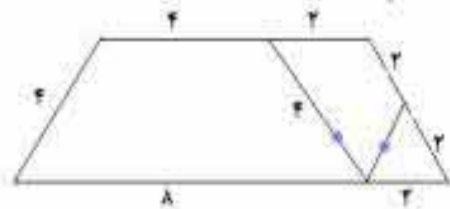
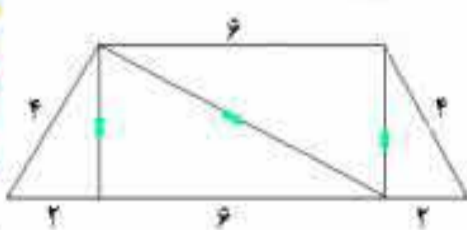
الف) $\hat{A} = 30^\circ \Rightarrow AP = \frac{1}{2} AD \Rightarrow$

$$AP = 2, \quad DP^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \Rightarrow DP = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

-۱۹

ب) $PE^2 = DE^2 + DP^2 = 6^2 + 12 = 36 + 12 = 48 \Rightarrow PE = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

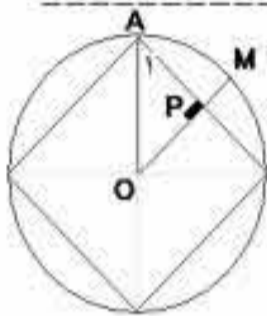
پ) روی DE ، E واحد جدا کرده و به موازات BE رسم می‌کنیم و قطر مرسوم از E را رسم کرده تا در مثلث باقیمانده را روی زوزنقه حاصل قرار می‌دهیم. (دو برش)
 اگر زوزنقه افیر را دو قسمت کنیم (سه برش)



$$\text{الف) } a^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = a^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad -20$$

$$\text{ضلع مربع} = 2x + a = 2\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) + a = a(\sqrt{2} + 1)$$

$$\text{ب) } 2x + a = 10 \Rightarrow a(\sqrt{2} + 1) = 10 \Rightarrow a = \frac{10}{\sqrt{2} + 1} \quad p = \lambda a = \frac{80}{\sqrt{2} + 1}$$



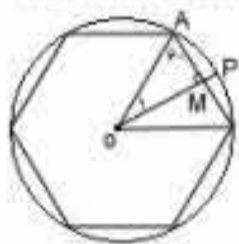
$$\hat{A}_1 = 45^\circ \Rightarrow \hat{\alpha} = 45^\circ \Rightarrow OM = AM$$

$$\text{الف) } OM^2 + AM^2 = R^2 = 1 \Rightarrow 2OM^2 = 1 \Rightarrow OM = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad -21$$

$$\text{ب) } MP = OP - OM = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ب) } AP^2 = MP^2 + AM^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 2 - \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AP = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$



-22- زوایای شش ضلعی منتظم ۱۲۰ درجه است پس

$$\text{الف) } \hat{O}_1 = 30^\circ, \quad OA = 1 \Rightarrow AM = \frac{1}{2}, \quad OM = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ب) } , OP = 1 \Rightarrow MP = OP - OM = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ب) } AP^2 = AM^2 + MP^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + 1 + \frac{3}{4} - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AP^2 = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow AP = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$