

$$a = 5, d = 8 - 5 = 3, s_n > 500$$

$$s_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \Rightarrow \frac{n}{2}(10 + (n-1)3) > 500 \Rightarrow \frac{n}{2}(3n + 7) > 500 \quad -1$$

$$\Rightarrow 3n^2 + 7n - 1000 > 0 \Rightarrow \left(n > \frac{-7 + \sqrt{12049}}{6} \text{ or } n < \frac{-7 - \sqrt{12049}}{6} \right) \Rightarrow n \geq 18$$

۲) سمت چپ مجموع تعداد دوایر قرمز به شکل \square است و سمت راست مساحت مربع به طول n که طبق شکل با هم برابر است.

۳- چون یک میلیارد تن برابر است با 10^{15} گرم بنابراین

$$a = 1, q = 2, n = 64, S_n = a \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) \Rightarrow 1 \left(\frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} \right) = S_{64}$$

$$\Rightarrow S_{64} = 2^{64} - 1 \approx 1.84 \times 10^{19} \div 10^{15} = 1.84 \times 10^4 = 18400$$

$$a = 1000, q = 0.9, n = 50 \Rightarrow S_{50} = 1000 \cdot \left(\frac{1 - 0.9^{50}}{1 - 0.9} \right) \Rightarrow \quad -2$$

$$S_{50} = 1000 (1 - 0.9^{50}) \approx 1000 (1 - 0.105) = 1000 (0.895) = 8950 \Rightarrow$$

$$S_n < \frac{1000}{1 - 0.9} = \frac{1000}{0.1} = 10000 \Leftarrow 1 - q^n < 1$$

$$q = \frac{1}{2}, a_n \leq \frac{1}{100} a, a_n = aq^{n-1} = a \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \leq \frac{1}{100} a \Rightarrow 2^{n-1} \geq 100 \geq 2^6 \quad -5$$

$$\Rightarrow n - 1 > 6 \Rightarrow n > 7$$

$$p, \frac{1}{2}p, \frac{1}{4}p, \dots \Rightarrow S_n = \frac{p}{1 - \frac{1}{2}} = 2p, S, \frac{1}{4}S, \frac{1}{16}S, \dots \Rightarrow S'_n = \frac{S}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}S \quad -6$$

$$p(x) = x^2 + ax + b, \begin{cases} p(1) = 0 \Rightarrow 1^2 + a(1) + b = 0 \Rightarrow a + b = -1 \\ p(2) = 0 \Rightarrow 2^2 + a(2) + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -4 \quad \text{الف} \end{cases} \quad -1$$

$$\Rightarrow a = -3, b = 2, \Rightarrow p(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$\begin{cases} p(0) = 0 \Rightarrow 0^2 + a(0) + b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ p(1) = 1 \Rightarrow 1^2 + a(1) + b = 1 \Rightarrow a = 0 \end{cases} \Rightarrow p(x) = x^2 \quad \text{ب}$$

$$\begin{cases} p(-1) = 2 \Rightarrow (-1)^2 + a(-1) + b = 2 \Rightarrow -a + b = 1 \\ p(2) = -1 \Rightarrow (2)^2 + a(2) + b = -1 \Rightarrow 2a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3 \quad \text{ج}$$

$$\Rightarrow 2 + b = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow p(x) = x^2 - 3x - 1$$

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow p\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - m\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{m}{4} + \frac{1}{2} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{m}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow m = \frac{25}{2}$$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow p(1) = 4 \Rightarrow 1^2 + a(1)^2 + 1 + b = 4 \Rightarrow a + b = 2 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow p(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^2 + a(-2)^2 + (-2) + b = 0 \Rightarrow 4a + b = -1 \end{cases} \quad -2$$

$$3a = 3 \Rightarrow a = 1, \frac{1}{3} + b = 2 \Rightarrow b = \frac{5}{3}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 3 \Rightarrow p(2) = 0, p(3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^4 - 2(2)^3 + m(2) + n = 0 \Rightarrow 2m + n = 8 \\ 3^4 - 2(3)^3 + m(3) + n = 0 \Rightarrow 3m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow m = -8, n = 24$$

-٤

حل مسائل مسابان صفحه ١٠

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - 5x - 6 & x - 2 \\ \pm x^3 + 2x^2 & x^2 + 4x + 3 \\ \hline & 4x^2 - 5x \\ & \pm 4x^2 + 8x \\ \hline & 13x - 6 \\ & \pm 13x + 26 \\ \hline & 20 \end{array}$$

-٥

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2, f(2) = 2^3 + 2(2)^2 - 5(2) - 6 = 8 + 8 - 10 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - 2)(x^2 + 4x + 3) = (x - 2)(x + 1)(x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ or } x = -1 \text{ or } x = -3$$

$$x = 2, p(2) = 0 \Rightarrow 2^3 - 2(2)^2 + a(2) + 2 = 0 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

-٦

$$\Rightarrow p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x - 2) - (x - 2) = (x^2 - 1)(x - 2)$$

$$\Rightarrow p(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ or } x = -1 \text{ or } x = 2$$

الف) $(1 - x)^5 = (1)^5 - 5(1)^4(x) + 10(1)^3(x)^2 - 10(1)^2(x)^3 + 5(1)(x)^4 - (x)^5 = 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5$

ب) $(1 + \frac{2}{x})^6 = (1)^6 + 6(1)^5(\frac{2}{x}) + 15(1)^4(\frac{2}{x})^2 + 20(1)^3(\frac{2}{x})^3 + 15(1)^2(\frac{2}{x})^4 + 6(1)(\frac{2}{x})^5 + (\frac{2}{x})^6$

$$6(1)(\frac{2}{x})^5 + (\frac{2}{x})^6 = 1 + \frac{12}{x} + \frac{60}{x^2} + \frac{160}{x^3} + \frac{240}{x^4} + \frac{192}{x^5} + \frac{64}{x^6}$$

$$\begin{aligned} (2x-3y)^4 &= (2x)^4 - 4(2x)^3(3y) + 6(2x)^2(3y)^2 - 4(2x)(3y)^3 - \\ & (3y)^4 = 16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4 \end{aligned}$$

حل مسائل حسابان صفحه ۱۰

۱- جملات $(2-\sqrt{3})^n$ به شکل $(-1)^i (2)^{n-i} (\sqrt{3})^i$ ، $i=0,1,2,\dots,n$ است. به ازای i زوج این جملات صحیح مثبت و به ازای i فرد این جملات منفی و ضریب صحیح از $\sqrt{3}$ است و تنها تفاوت با $(2+\sqrt{3})^n$ ، منفی بودن ضریب $\sqrt{3}$ است پس $(2-\sqrt{3})^n = 262 - b\sqrt{3}$.

$$(2+\sqrt{3})^n (2-\sqrt{3})^n = (262+b\sqrt{3})(262-b\sqrt{3}) \Rightarrow 262^2 - 3b^2 = 4-3=1$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{262^2 - 1}{3} = \frac{261 \times 263}{3} = 261 \times 121 \Rightarrow b = 19 \times 11 = 209$$

$$A = x^9 - x^3y^3 = x^3(x^6 - y^3) = x^3(x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2)$$

$$B = (a^6 + 1)^2 - (a^6 - 1)^2 = (a^6 + 1 - a^6 + 1)(a^6 + 1 + a^6 - 1) = 2a^6(2) = 4a^6$$

۱۰- استقرا بر روی توان دو جمله ای ،

$$k=1 \Rightarrow 1-x^2 = (1+x)(1-x) \quad \checkmark$$

$$\text{فرض } P(k) : 1-x^{2k} = (1+x)(1-x+\dots-x^{2k-1})$$

$$\text{مکمل } P(k+1) : 1-x^{2k+2} = (1+x)(1-x+\dots-x^{2k+1})$$

$$(1+x)(1-x+\dots-x^{2k-1} + x^{2k} - x^{2k+1}) =$$

$$\text{(اثبات)} \quad (1+x)(1-x+\dots-x^{2k-1}) + (1+x)(x^{2k} - x^{2k+1}) =$$

$$(1-x^{2k}) + (x^{2k} - x^{2k+1} + x^{2k+1} - x^{2k+2}) = 1-x^{2k+2}$$

$$\begin{cases} 18 = 2 \times 3^2 \\ 24 = 2^3 \times 3 \\ 32 = 2^5 \\ 288 = 2^5 \times 3^2 \end{cases}$$

۱) ک م م سه عدد ۱۸ و ۲۴ و ۳۲ برابر است

$$\begin{cases} 1, 5, 9, \dots \Rightarrow a_n = 1 + (n-1)4 = 4n - 3 \\ 4, 7, 10, \dots \Rightarrow a_m = 4 + (m-1)3 = 3m + 1 \end{cases} \Rightarrow 3m + 1 = 4n - 3 \quad -2$$

$$\Rightarrow 3m = 4n - 4 = 4(n-1) \Rightarrow \begin{cases} m = 4k \\ n-1 = 3k \Rightarrow n = 3k + 1 \end{cases} \Rightarrow a_n = a_m = 12k + 1$$

$$100 < 12k + 1 < 999 \Rightarrow 99 < 12k < 998 \Rightarrow \frac{99}{12} < k < \frac{998}{12} \Rightarrow$$

$$8.25 < k < 83.1 \Rightarrow 9 \leq k \leq 83 \Rightarrow 83 - 9 + 1 = 75 \quad \text{۷۵ جمله وجود دارد.}$$

$$\begin{cases} 72 = 2^3 \times 3^2 \\ 40 = 2^3 \times 5 \\ 48 = 2^4 \times 3 \end{cases} \quad \frac{(48 + 40 + 72)}{8} = 20 \quad -3$$

ب م م سه عدد ۷۲ و ۴۰ و ۴۸ برابر است با ۸ و پس تعداد ۲۰ بطری ۸ لیتری لازم است.

$$\text{الف) } \frac{(x-1)(x-4)}{x(x-4)} \times \frac{x^2(x+2)}{(x+2)(x-1)} = x \quad -4$$

$$\text{ب) } \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)} \times \frac{(x-3)(x-7)}{(x-7)(x+1)} = \frac{x-3}{x+3}$$

$$\text{ج) } \frac{1}{(a-1)(a+1)} + \frac{2a}{(a+1)^2} - \frac{2}{a+1} = \frac{a+1+2a(a-1)-2(a-1)(a+1)}{(a-1)(a+1)^2}$$

$$= \frac{a+1+2a^2-2a-2a^2+2}{(a-1)(a+1)^2} = \frac{-a+3}{(a-1)(a+1)^2}$$

$$\text{د) } \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x+3} - \frac{8}{(x+3)(x-1)} = \frac{(x+1)(x+3)+1(x-1)-8}{(x+3)(x-1)} =$$

$$\frac{x^2+4x+3+x-1-8}{(x+3)(x-1)} = \frac{x^2+5x-6}{(x+3)(x-1)} = \frac{(x+6)(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x+6}{x+3}$$

$$\alpha = \beta + 2, \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{m}{2} \quad -1$$

$$\Rightarrow \beta + 2 + \beta = 4 \Rightarrow 2\beta = 2 \Rightarrow \beta = 1, \quad \alpha = 1 + 2 = 3 \Rightarrow 3 \times 1 = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 6$$

$$\text{الف) } f(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad x = \pm 2 \quad -2$$

$$\text{ب) } q(x) = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \left(x + \frac{1}{x} + 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \\ x + \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$$

که در هر دو معادله جواب وجود ندارد. (چون $\Delta < 0$)

$$\text{الف) } x(2x^2 + x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{یا} \quad 2x^2 + x + 3 = 0 \quad -3$$

معادله دوم جواب ندارد چون $\Delta = -23 < 0$ پس تنها جواب $x = 0$ است.

$$\text{ب) } 9x^2 - 33 + 148 - 4x^2 = 24 \Rightarrow 5x^2 = 125 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

$$\alpha + \beta = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1 \quad \text{ع - الف)}$$

$$\Rightarrow x^2 - 1x + \frac{4}{25} = 0 \Rightarrow 25x^2 - 25x + 4 = 0$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{25}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2 \\ \alpha\beta = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$f(x) = 9x^2 + 6x + 3, \quad a = 9 > 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3} \quad -5$$

$$\Rightarrow y_{\min} = 9\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{3}\right) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$$

$$f(x) = 4 + 8x - x^2, \quad a = -1 < 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$\Rightarrow y_{\max} = 4 + 8(4) - 4^2 = 20$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{5}{4} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{\frac{5}{4}}{-\frac{5}{4}} = -1 \\ \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{-\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - \frac{4}{5} = 0 \quad -1$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 5x - 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 80 = 105 > 0$$

$$s = -\frac{b}{a} = \frac{5}{5} > 0, \quad p = \frac{c}{a} = \frac{-4}{5} < 0 \quad -7$$

معادله دارای دو ریشه مقلف علامه است که عدد مثبت از نظر قدر مطلق از دیگری بزرگتر است.

$$\begin{aligned} & \text{سن فعلی} = x, (x+21) = (x-21)^2 \Rightarrow x^2 - 42x + 441 = x + 21 \quad - ۸ \\ & \Rightarrow x^2 - 43x + 420 = 0 \Rightarrow x = 15 \text{ یا } x = 28 \leftarrow \text{سن معلم} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{x}{3} + 1\right)\left(\frac{x}{4} + 1\right) = 20 \Rightarrow (x+3)(x+4) = 240 \Rightarrow x+3 = 15 \Rightarrow x = 12 \quad - ۹$$

$$\begin{cases} x = y + 10 \\ xy - 40 = 39y + 22 \end{cases} \Rightarrow (y+10)y - 40 = 39y + 22 \Rightarrow y^2 + 10y - 40 = 39y + 22 \quad (۱۰)$$

$$\Rightarrow y^2 - 29y - 62 = 0 \Rightarrow (y-31)(y+2) = 0 \xrightarrow{y \oplus} y = 31, x = 31 + 10 = 41$$

$$(x^2 - 2)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ \text{یا} \\ x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases} \quad - ۱۱$$

$$\text{ب) } \left(\frac{x^2}{3} - 2 - 6\right)\left(\frac{x^2}{3} - 2 - 1\right) = 0 \Rightarrow x^2 = 24 \text{ یا } x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6} \\ \text{یا} \\ x = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \end{cases}$$

$$\text{ج) } (4 - x^2 - 5)(4 - x^2 + 3) = 0 \Rightarrow (-x^2 - 1)(7 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \quad \times \\ \text{یا} \\ x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \end{cases}$$

$$f(x) = x + \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 2}{x} = \frac{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + 2\sqrt{2}x}{x} = \frac{(x - \sqrt{2})^2}{x} + 2\sqrt{2} \quad -۱۲$$

به ازای مقادیر مثبت x کمترین مقدار $\frac{(x - \sqrt{2})^2}{x}$ برابر صفر است که از $x = \sqrt{2}$ حاصل می شود.

$$y_{\min} = 2\sqrt{2} \quad \text{در این صورت:}$$

$$p(-2) = -2 \Rightarrow a(-2)^2 + b(-2) + c = -2 \Rightarrow 4a - 2b + c = -2 \quad -۱۳$$

$$p(0) = 0 \Rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$p(4) = 0 \Rightarrow a(4)^2 + b(4) + c = 0 \Rightarrow 4a + b = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - b = -1 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{6}, b = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

x	0	4
$p(x)$	$-$	$+$

$$p(0) = 3 \Rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 3 \Rightarrow c = 3$$

$$x_{\min} = -\frac{b}{2a} = -4 \Rightarrow b = 8a$$

$$p(-4) = -2 \Rightarrow a(-4)^2 + b(-4) + 3 = -2 \Rightarrow 16a - 4b = -5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 8a \\ 16a - 4b = -5 \end{cases} \Rightarrow 16a - 32a = -5 \Rightarrow a = \frac{5}{16}, b = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{5}{16}x^2 + \frac{5}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow 5x^2 + 40x + 48 = 0 \Rightarrow x = \frac{-20 \pm 4\sqrt{10}}{5}$$

آگر مقدار $P(x)$ منفی و در فارج این بازه مثبت است.

$$\begin{cases}
 p(\cdot) = \cdot \Rightarrow a(\cdot)^2 + b(\cdot) + c = \cdot \Rightarrow c = \cdot \\
 x = -\frac{b}{2a} = \cdot \Rightarrow b = \cdot \\
 p(1) = 1 \Rightarrow a(1)^2 + b(1) + c = 1 \Rightarrow a + b = 1 \Rightarrow a = 1
 \end{cases}$$

پس $P(x) = x^2$ که همواره مثبت است.

۱۴ - x طول و y عرض

$$\begin{cases}
 2(x+y) = 18 \Rightarrow x+y = 9 \Rightarrow y = 9-x \\
 xy = 14 \Rightarrow x(9-x) = 14 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-7) = 0 \\
 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow y=9-2=7 \\ x=7 \Rightarrow y=9-7=2 \end{cases}
 \end{cases}$$

$$1- \text{ک.م.م.} = p(p+1)$$

$$\frac{6}{p} = 2 + \frac{p}{p+1} \Rightarrow 6(p+1) = 2p(p+1) + p(p) \Rightarrow 3p^2 - 4p - 6 = 0$$

$$p = \frac{2 \pm \sqrt{4+18}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{22}}{3} \quad \text{چون فقط } p = 0, p = -1 \text{ مفرج، ا صفر می کنند پس ق ق}$$

$$2- \text{ک.م.م.} = k(2-k)$$

$$k(k) + 2(2-k) = 5k(2-k) \Rightarrow k^2 + 4 - 2k = 10k - 5k^2 \Rightarrow$$

$$6k^2 - 12k + 4 = 0 \Rightarrow 3k^2 - 6k + 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{2 \pm \sqrt{4-6}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{3}$$

چون فقط $k = 0, k = 2$ مفرج، ا صفر میکنند دو جواب قابل قبولند.

$$3- \text{ک.م.م.} = (3k-1)^2$$

$$2(3k-1)^2 + 5(3k-1) = -2 \Rightarrow 18k^2 - 12k + 2 + 15k - 5 = -2 \Rightarrow$$

$$18k^2 + 3k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{36} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{6} \\ k = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

چون فقط $k = \frac{1}{3}$ مفرج کسر، ا صفر می کند، دو جواب قابل قبولند.

$$4- \text{ک.م.م.} = y^2 + 5y = y(y+5)$$

$$3y + 5 + y(y+4) = (y+1)(y+5) \Rightarrow 3y + 5 + y^2 + 4y = y^2 + 6y + 5 \Rightarrow y = 0$$

چون $y = 0, y = -5$ مفرج کسر، ا صفر می کنند پس جواب به دست آمده قابل قبول نیست

و معادله جواب ندارد.

$$5 - \text{ک.م.م} = m(m+2)(m-2) = m(m^2-4)$$

$$3m(m-2) + 2(m^2-4) = 4m-4 \Rightarrow 3m^2 - 6m + 2m^2 - 8 = 4m - 4$$

$$5m^2 - 10m - 4 = 0 \Rightarrow m = \frac{5 \pm \sqrt{45}}{5}$$

چون $m = \pm 2$ ، $m = 0$ مفرج را صفر می کنند هر دو جواب قابل قبولند.

$$6 - \text{ک.م.م} = x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

$$2(x+3) - 3(x-3) = 12 \Rightarrow -x + 15 = 12 \Rightarrow x = 3$$

چون $x = \pm 3$ جوابهای مفرجند بنابراین تنها جواب به دست آمده قابل قبول نیست.

۷- چون $x = -3$ جواب مفرج است بنابراین مجموعه جواب برابر $R - \{-3\}$ است.

$$\begin{cases} nx = 12000 \\ (n+4)(x-100) = 12000 \end{cases} \Rightarrow nx + 4x - 100n - 400 = 12000 \Rightarrow$$

$$12000 + 4x - 100n - 400 = 12000 \Rightarrow 4x - 100n = 400 \Rightarrow x = 25n + 100, nx = 12000$$

$$\Rightarrow n(25n + 100) = 12000 \Rightarrow n(n+4) = 480 \Rightarrow n^2 + 4n - 480 = 0 \Rightarrow n = \frac{-2 \pm \sqrt{484}}{1}$$

$$\Rightarrow n = -2 \pm 22 \Rightarrow n = 20 \text{ or } n = -24$$

چون n تعداد اسباب بازی است پس $n = -24$ قابل قبول نیست پس $x = \frac{12000}{20} = 600$.

$$\sqrt{1-x^2} = x \Rightarrow 1-x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sqrt{1-\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱- الف)

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x \Rightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}) \Rightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x=1 \\ (1+\sqrt{x})^2 = 1 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{1}}{1+\sqrt{1}} = 0 = 1-1 \\ x=0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{0}}{1+\sqrt{0}} = 1 = 1-0 \end{cases}$$

ب)

ج) راه حل اول: $(2+\sqrt{1+x})^2 = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow 5+x+4\sqrt{1+x} = x \Rightarrow \sqrt{1+x} = -\frac{5}{4}$

راه حل دوم: چون باید $x > 0$ باید باشد پس $\sqrt{1+x} > \sqrt{x}$ بنابراین $2+\sqrt{1+x} > \sqrt{x}$ پس معادله دارای جواب نیست.

۲- عبارت صفر نمی شود $\sqrt{1-x} \geq 0, \sqrt{2-x} \geq 0, 3 > 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{2-x} + 3 > 0$

$$\text{الف) } V = \sqrt{\frac{2k}{m}} \Rightarrow V^2 = \frac{2k}{m} \Rightarrow k = \frac{mV^2}{2}$$

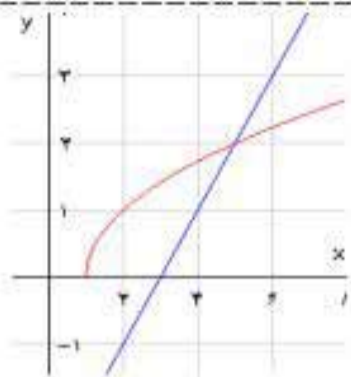
۳-

$$\text{ب) } F = \frac{1}{2\pi} \sqrt{LC} \Rightarrow F^2 = \frac{1}{4\pi^2} (LC) \Rightarrow L = \frac{4\pi^2 F^2}{C}$$

$$\text{ج) } I = \frac{nE}{R+nr} \Rightarrow IR = nE - nr = n(E - Ir) \Rightarrow n = \frac{IR}{E - Ir}$$

$$\text{د) } \frac{R_1 V_1}{T_1} = \frac{R_2 V_2}{T_2} \Rightarrow T_1 = \frac{R_1 V_1 T_2}{R_2 V_2}$$

$$\text{ه) } A = p(1+i)^2 \Rightarrow (1+i)^2 = \frac{A}{p} \Rightarrow 1+i = \sqrt{\frac{A}{p}} \Rightarrow i = \sqrt{\frac{A}{p}} - 1$$



الف) هندسی :

$$y = \sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 5 \\ \hline y & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$y = x-3 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & -1 & 0 & 2 \end{array}$$

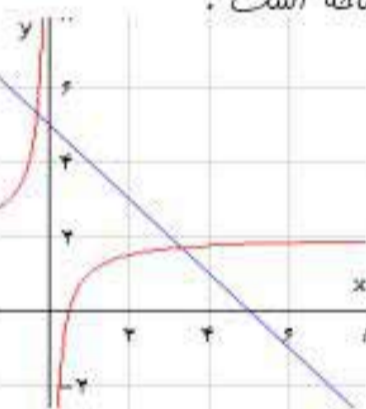
تنها جواب $x=5$ است.

$$x-1 = (x-3)^2 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x=2 \text{ or } x=5$$

جبری :

$$x=2 \Rightarrow \sqrt{2-1} = 2-3 \quad x=5 \Rightarrow \sqrt{5-1} = 5-3$$

فقط تساوی دوم درست است پس تنها $x=5$ قابل قبول است.



ب) هندسی : نمودار $y = \frac{2x-1}{x}$ در دو سمت خط $x=0$ دارای دو شاخه است.

$$y = \frac{2x-1}{x} \Rightarrow \begin{array}{c|cccccc} x & -2 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \hline y & \frac{7}{2} & 3 & 4 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}$$

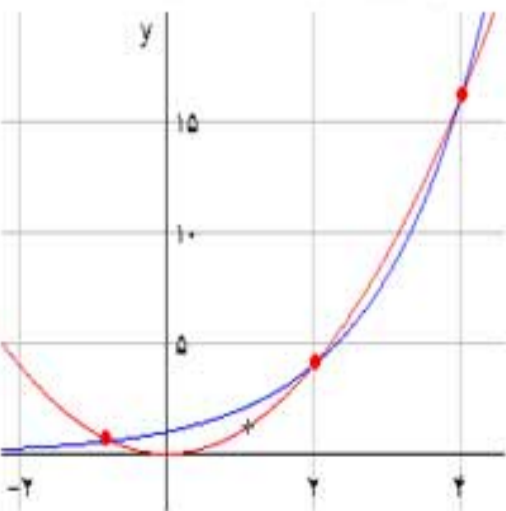
$$y = 5-x \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 5 & 2 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$$

با توجه به نمودار $x = -0.25$, $x = 3/5$ دو جواب تقریبی اند.

جبری :

$$\frac{2x-1}{x} = 5-x \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$x=0$ مخرج کسر را صفر میکند پس هر دو جواب قابل قبولند.



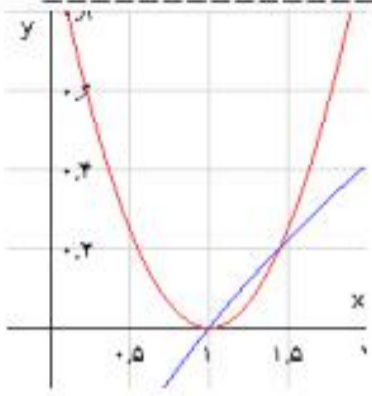
ج) هندسی :

$$y = 2^x \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 1 & 2 & 4 & 8 \end{array}$$

$$y = x^2 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

با توجه به نمودار $x = 4$, $x = -0.75$, $x = 2$ جواب اند.

جبری : x



$$\sqrt{x} + 2x = x^2 + 2 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 = (x-1)^2$$

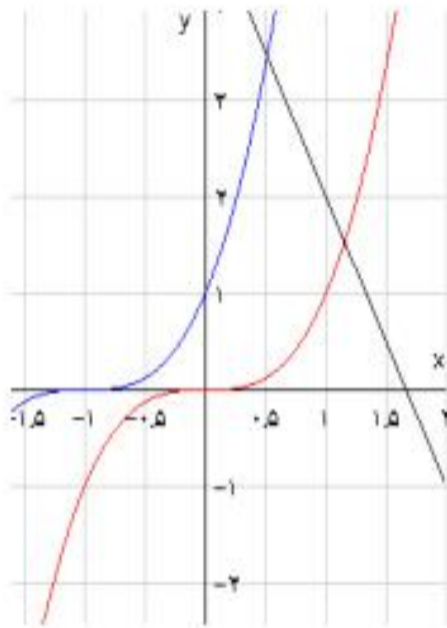
$$y = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 4 & 9 \\ y & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

(د) هندسی :

$$y = (x-1)^2 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ y & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

با توجه به شکل دو جواب $x = 1/4$, $x = 1$ وجود دارد.

جبری : x



$$y = x^3 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ y & -1 & 0 & 1 & 8 \end{array}$$

$$y = -3x + 5 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 1/5 & 2 \\ y & 5 & 2 & 0.5 & -1 \end{array}$$

- ۲

طول مغل بر فورد نمودار آبی و سیاه تقریباً $x = 0.5$ است .

$$(-a)^2 = (a)^2 = a^2 \Rightarrow \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{(a)^2} \Rightarrow |-a| = |a|$$

-۱

$$|a|^2 = |a| \times |a| = a^2 = a^2 \quad (a^2 \geq 0)$$

$$|a| \leq |a| \Rightarrow -|a| \leq a \leq |a| \quad \text{پس } |a| \leq c, c \geq 0 \Rightarrow -c \leq a \leq c$$

-۳

$$\left. \begin{array}{l} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{array} \right\} \Rightarrow -(|a| + |b|) = -|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b| \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|y| = |x + y - x| \leq |x| + |y - x| \Rightarrow |y| \leq |x| + |y - x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |y - x|$$

-۴

$$|a| > |c| \Rightarrow a^2 > c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = (a - c)(a + c) > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - c > 0, a + c > 0 \Rightarrow a > c, a > -c \Rightarrow a > c \\ \text{or} \\ a - c < 0, a + c < 0 \Rightarrow a < c, a < -c \Rightarrow a < -c \end{cases}$$

-۵

توضیح: برای برقراری شرط $a > c, a > -c$ با توجه به آنکه c مثبت است کافیهست $a > c$.

$$\text{الف) } f(x) = x|x| = \begin{cases} x(x) = x^2 & x \geq 0 \\ x(-x) = -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{ب) } f(x) = \begin{cases} x + 1 - 2 = x - 1 & x \geq 0 \\ -x - 1 - 2 = -x - 3 & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{ج) } x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\begin{cases} x < -2 \Rightarrow y = -(x - 1 + x + 2) = -2x - 1 \\ -2 \leq x \leq 1 \Rightarrow y = -x + 1 + x + 2 = 3 \\ x > 1 \Rightarrow y = x - 1 + x + 2 = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} -2x - 1 & x < -2 \\ 3 & -2 \leq x \leq 1 \\ 2x + 1 & x > 1 \end{cases}$$

x	-2	1
$x - 1$	$-$	$- \circ +$
$x + 2$	$- \circ +$	$+$

-۶

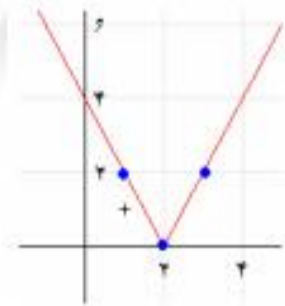
الف) $|2t-1|=3 \Rightarrow 2t-1=\pm 3 \Rightarrow t=2 \text{ or } t=-1$

-۱

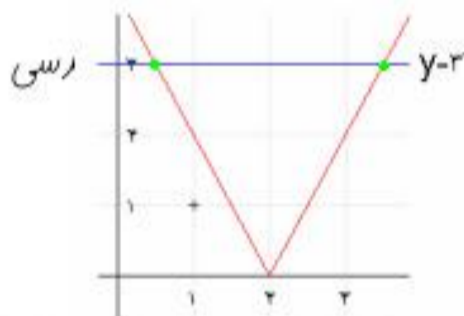
ب) $|y^2-2|=7 \Rightarrow y^2-2=\pm 7 \Rightarrow \begin{cases} y^2=9 \Rightarrow y=\pm 3 \\ y^2=-5 \quad \times \end{cases}$

ج) $|2x-3|=-(2x-3) \Rightarrow 2x-3 \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$

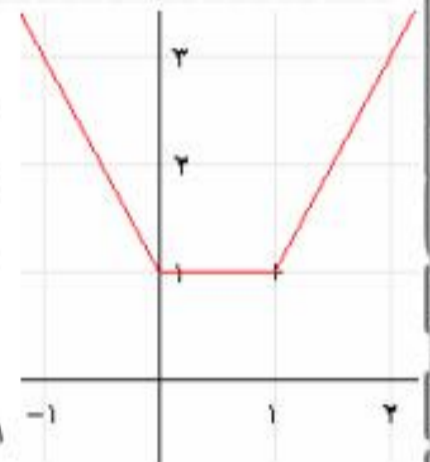
الف) $2x-4=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 2 & 0 & 2 \end{array} \Rightarrow$



ب) $|2x-4|=3 \Rightarrow 2x-4=\pm 3 \Rightarrow x=\frac{7}{2} \text{ or } x=\frac{1}{2}$

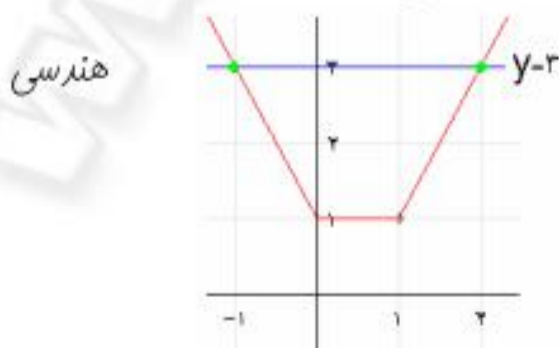


ب) $y=|x|+|1-x| = \begin{cases} -x+1-x=1-2x & x < 0 \\ x+1-x=1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1+x=2x-1 & x > 1 \end{cases}$

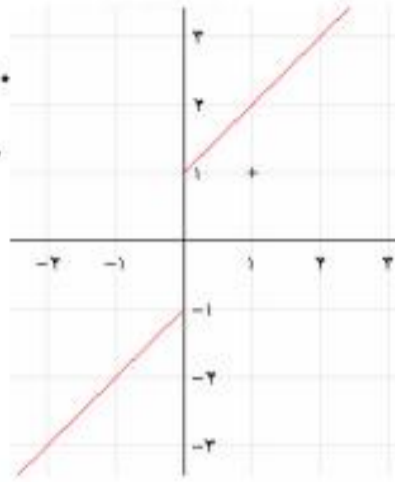


ج) $|x|+|1-x|=3 \Rightarrow \begin{cases} 1-2x=3 \text{ (if } x < 0) \Rightarrow x=-1 \\ 1=3 \text{ (if } 0 \leq x \leq 1) \\ 2x-1=3 \text{ (if } x > 1) \Rightarrow x=2 \end{cases}$

پس جوابهای معادله $x=-1, x=2$ است.

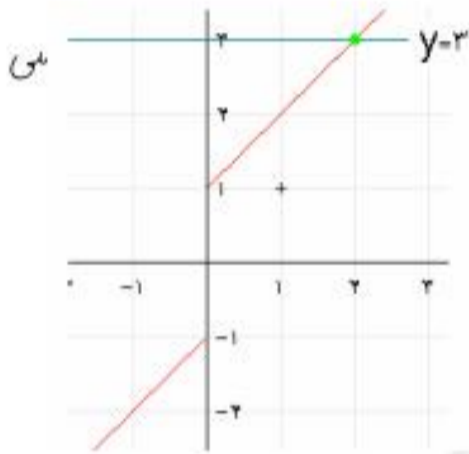


$$ج) y = x + \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$$



$$y = 3 \Rightarrow \begin{cases} x+1=3 \Rightarrow x=2 \text{ (if } x > 0) \\ x-1=3 \Rightarrow x=4 \text{ (if } x < 0) \end{cases}$$

پس تنها جواب قابل قبول $x=2$ است .



$$۱) x(x^2 - 2x + 1) \geq 0 \Rightarrow x(x-1)^2 \geq 0.$$

ولی $(x-1)^2 \geq 0$ همواره برقرار است پس باید $x \geq 0$.

$$۲) \frac{2x-1}{x} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} > 0.$$

ریشه های صورت و مخرج $x=1$ ، $x=0$ هستند پس باید $x \geq 1$ or $x < 0$.

$$\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x-1} - \frac{2}{1} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-1) - x(x) - 2x(x-1)}{x(x-1)} \leq 0 \Rightarrow$$

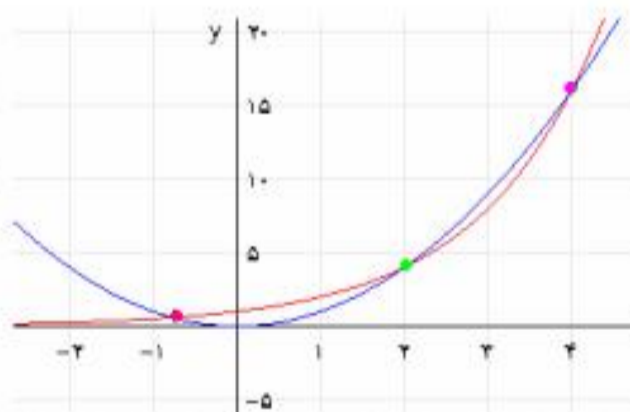
$$۳) \frac{x^2 - 1 - x^2 - 2x^2 + 2x}{x(x-1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 + 2x - 1}{x(x-1)} \leq 0.$$

برای صورت کسر افیر $\Delta = 2^2 - 4(-2 \times (-1)) = 4 - 8 = -4 < 0$ پس همواره هم علامت a یعنی منفی است. پس مخرج باید مثبت باشد یعنی $x > 1$ or $x < 0$.

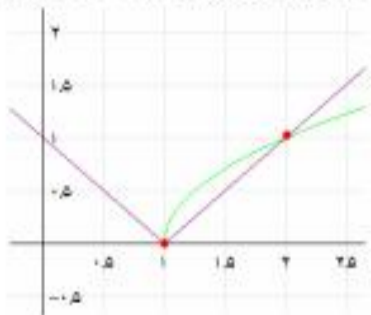
$$۴) |x-2| \leq x \Rightarrow x \geq 0, (x-2)^2 \leq x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \leq x^2 \Rightarrow x \geq 1$$

اشتراک دو شرط $(x \geq 1, x \geq 0)$ برابر $x \geq 1$ است.

۵) قسمت از نمودار $y = x^2$ که زیر نمودار $y = 2^x$ قسمت را می یابیم. $-0.75 \leq x \leq 2$ or $x \geq 4$.

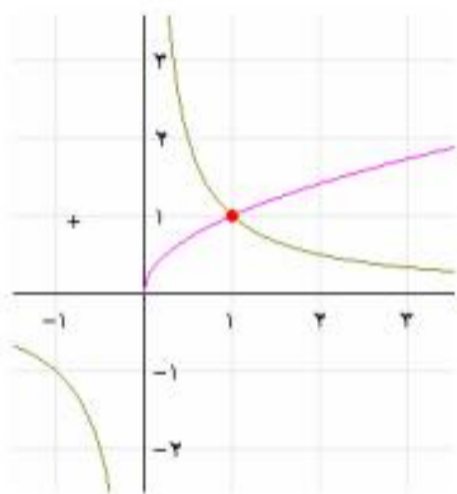


$$۶) y = \sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 5 \\ \hline y & 0 & 1 & 2 \end{array} \text{ , } y = |x-1| \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 \end{array}$$



مجموعه جواب برابر $x \geq 2$ است.

$$v) y = \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -1 & -0.5 & 0.5 & 1 \\ \hline y & -1 & -2 & 2 & 1 \end{array} \quad , \quad y = \sqrt{x} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 4 \\ \hline y & 0 & 1 & 2 \end{array}$$



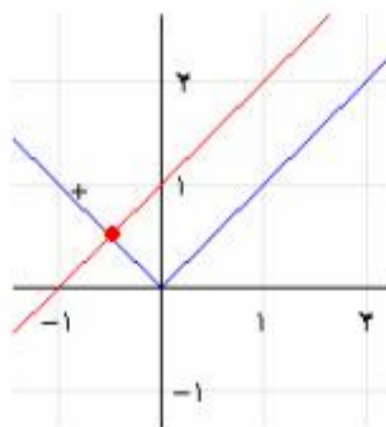
با توجه به شکل برای $x < 1$ نمودار $y = \frac{1}{x}$ زیر نمودار $y = \sqrt{x}$ قرار دارد.

$$x+1 < |x| \Rightarrow (x+1)^2 < x^2 \Rightarrow$$

$$1) \quad x^2 + 2x + 1 < x^2 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$$

$$y = x+1 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 2 \end{array}$$

$$, \quad y = |x| \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 \end{array}$$



روش جبری :

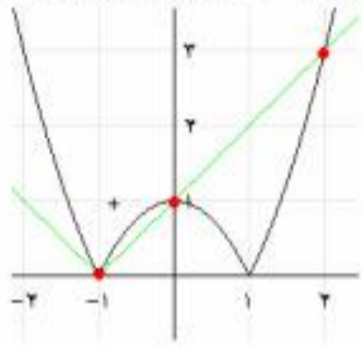
روش هندسی :

$$9) \quad |x^2 - 1| \leq |x+1| \Rightarrow |x+1| \times |x-1| \leq |x+1| \Rightarrow \begin{cases} |x+1| = 0 \Rightarrow x = -1 \\ \text{or} \\ |x-1| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x-1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

پس مجموعه جواب برابر $\{-1\} \cup [0, 2]$ است.

$$y = |x^2 - 1| \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}$$

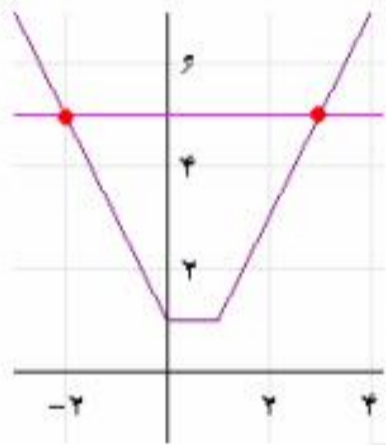
هندسی :



$$y = |x+1| \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -2 & -1 & 0 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$1) |x| + |x-1| = \begin{cases} -x-x+1 & x < 0 \\ x-x+1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x+x-1 & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} -2x+1 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & x > 1 \end{cases} \quad \text{پیری:}$$

$$\begin{cases} x < 0, -2x+1 \leq 5 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow -2 \leq x < 0 \\ 0 \leq x \leq 1, 1 \leq 5 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \\ x > 1, 2x-1 \leq 5 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow 1 < x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2, 3]$$



$$\text{هندسی: نمودار } y = \begin{cases} -2x+1 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & x > 1 \end{cases} \text{ و } y = 5 \text{ رسم کنید.}$$